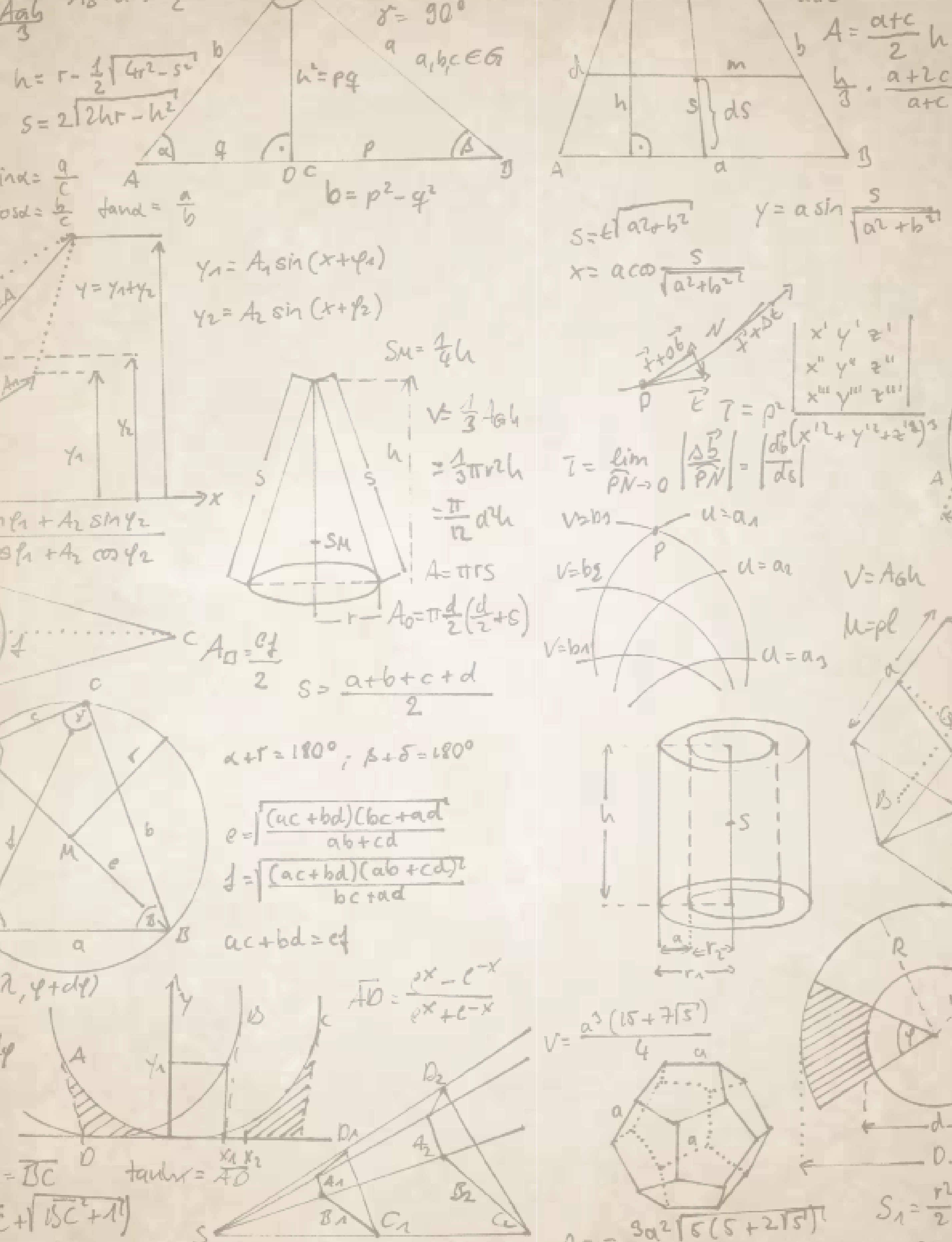
La vida secreta de las ECUACIONES



γ = 90°
h² = pq
b = p² − q²
y = y₁ + y₂
y₁ = A₁ sin (x + φ₁)
y₂ = A₂ sin (x + φ₂)
A = πrs
V = Agh
S = (a + b + c + d)/2
α + γ = 180° ; β + δ = 180°
ac + bd = ef
ds

La vida secreta de las ECUACIONES

Las 50 grandes ecuaciones y para qué sirven

RICH COCHRANE

LAROUSSE

Editado originalmente en Gran Bretaña, 2016, por Cassell, división de Octopus Publishing Group Ltd.

EDICIÓN ORIGINAL
Director editorial: *Trevor Davies*
Editor sénior: *Alex Stetter*
Director de arte: *Jonathan Christie*
Diseñador: *Tracy Killick*
Ilustradores: *Emily@kja-artists.com y Peter Liddiard, de suddenimpactmedia.co.uk*
Documentalistas gráficos: *Giulia Hetherington, Jennifer Veall*
Asistente de producción: *Lucy Carter*

EDICIÓN ESPAÑOLA
Dirección editorial: *Jordi Induráin Pons*
Edición: *Carlos Dotres Pelaz*
Traducción: *Alícia Almonacid Goberna*
Adaptación y asesoría científica: *Roberto Ferreiro Gómez*
Adaptación de maqueta y de cubierta, y preimpresión: *Grupo Ormo*

Rosa Sensat, 9-11, 3.ª planta • 08005 Barcelona
teléfono: 93 241 35 05 • larousse@larousse.es
www.larousse.es • facebook.com/larousse.es • @Larousse_ESP

Primera edición: 2018
ISBN: 978-84-16984-99-2
Depósito legal: B-2499-2018

Sumario

Introducción

Hacia el año 820 d. C., el matemático persa Muḥammad ibn Mūsā al-Jwārizmī escribió *Compendio de cálculo por reintegración y comparación*. En esta obra acuñó la palabra álgebra y recopiló algunos de sus principios básicos. En álgebra es fundamental el concepto de equilibrio, que se expresa con la ecuación: si colocamos una manzana en un plato de la balanza y una naranja en el otro, el equilibrio se produce cuando los pesos de ambas frutas son iguales. Y esto es lo que simbolizamos con las ecuaciones: que dos cosas están en equilibrio.

Cómo usar este libro

Este libro puede leerse de inicio a fin, como una novela; aunque no es habitual leer así un libro de matemáticas. Las matemáticas componen una vasta red de ideas interconectadas que invita a ser explorada, y no recorrida en un orden predefinido. Es por ello que este libro contiene muchas referencias cruzadas; y es posible que una sección solo cobre sentido al volver a ella después de haber leído otra. Esto no nos debe desanimar, así es como nos sentimos la mayoría de estudiantes de matemáticas. Incluso los grandes matemáticos confiesan sentirse perdidos o confusos al investigar en un nuevo campo; aunque, por otro lado, tampoco ocultan su alegría al hallar conexiones inesperadas, profundas y hermosas.

Al abordar un nuevo concepto matemático, es recomendable empezar por hacerse una idea intuitiva de lo que uno va a encontrar. Este libro no puede ser excesivamente técnico: sobre cada una de sus secciones se han escrito innumerables páginas en publicaciones especializadas. Su pretensión es exponer las ideas generales e indicar cómo estas ideas se conectan entre sí a través de campos diversos de las matemáticas, la ciencia y la vida cotidiana. Este planteamiento comporta inevitablemente simplificaciones drásticas que espero que los principiantes aprecien y los expertos, perdonen. Por ejemplo, la mayoría de las gráficas se presentan sin escalas numéricas —lo que imagino que no gustará demasiado a los profesores—; pero prescindir de los detalles nos permite no perder la perspectiva general.

Notación

A pesar de todo, este es un libro de ecuaciones. En algunas publicaciones de divulgación matemática se intenta evitar el uso de fórmulas complicadas. Este libro toma el camino opuesto. La notación matemática está pensada para facilitarnos las cosas, no para complicarlas. En este sentido, funciona como cualquier otro código: como los signos de los que se sirven los músicos, los editores, los coreógrafos, los tejedores o los jugadores de ajedrez. Si uno no tiene las claves, es completamente incomprensible. Pero si cuentas con ellas, la notación convierte textos arduos en nítidas imágenes.

Sin embargo, la notación matemática no siempre es lógica. Se ha desarrollado a lo largo de cientos de años y, como la mayoría de las cosas, muestra el rastro de su proceso evolutivo: a veces resulta peculiar, otras extraña y puede llegar incluso a carecer de sentido. Quizá podría crearse una notación nueva y más coherente para escribir ecuaciones, pero solo un temerario se atrevería a intentarlo. No hay porqué preocuparse si a veces entendemos qué representa un símbolo, pero no su forma. En su momento, aprender a leer fue una tarea mucho más ardua —pues el código es, si cabe, más arbitrario—, y si lo lograste entonces, seguro que puedes con los símbolos matemáticos.

Presumo que conoces los números enteros positivos y negativos; que sabes qué es una fracción y cuáles son los principios del álgebra; que las letras (y otros símbolos) se usan para representar valores desconocidos o variables; que el producto de estas

Tabla de símbolos

A continuación se listan los símbolos más importantes que aparecen a lo largo del libro, junto a la sección en la que se usan por primera vez.

$\sqrt{x}$	**raíz cuadrada de *x* [Teorema de Pitágoras, página 10]**
Σ	**sumatorio [Paradoja de Zenón, página 18]**
lím	**límite [Paradoja de Zenón, página 18]**
∞	**infinito [Paradoja de Zenón, página 18]**
π	**número pi [Identidad de Euler, página 40]**
sen, cos, tan	**funciones trigonométricas [Trigonometría, página 14]**
$\int$	**integral [Teorema fundamental del cálculo, página 26]**
$\frac{dy}{dx}$	**derivada de *y* respecto a *x* (u otras letras en lugar de *y* y *x*) [Teorema fundamental del cálculo, página 26]**
$\frac{d^2y}{dx^2}$	**segunda derivada de *y* respecto a *x* (u otras letras en lugar de *y* y *x*) [Teorema fundamental del cálculo, página 26]**
x', x''	**primera y segunda derivadas de *x* respecto al tiempo (notación alternativa) [Curvatura, página 30]**
log, ln	**logaritmos [Logaritmos, página 36]**
i	**raíz cuadrada de –1 [Identidad de Euler, página 40]**
∇^2	**laplaciano [Ecuación del calor, página 80]**
$\nabla\cdot$, $\nabla\times$	**divergencia y rotacional de un campo vectorial [Ecuaciones de Maxwell, página 92]**
∇	**gradiente [Ecuación de Navier-Stokes, página 96]**
$\neg$, $\wedge$, $\vee$	**operadores lógicos NO, Y, O [Leyes de De Morgan, página 126]**
$P(x)$	**probabilidad de un suceso *x* [Distribución uniforme, página 162]**
$P(x\|y)$	**probabilidad condicionada de *x* dado *y* [Teorema de Bayes, página 168]**

cantidades desconocidas se puede representar escribiendo las letras juntas, sin espacio:

$$a \times b = ab$$

y que la división puede expresarse como una fracción:

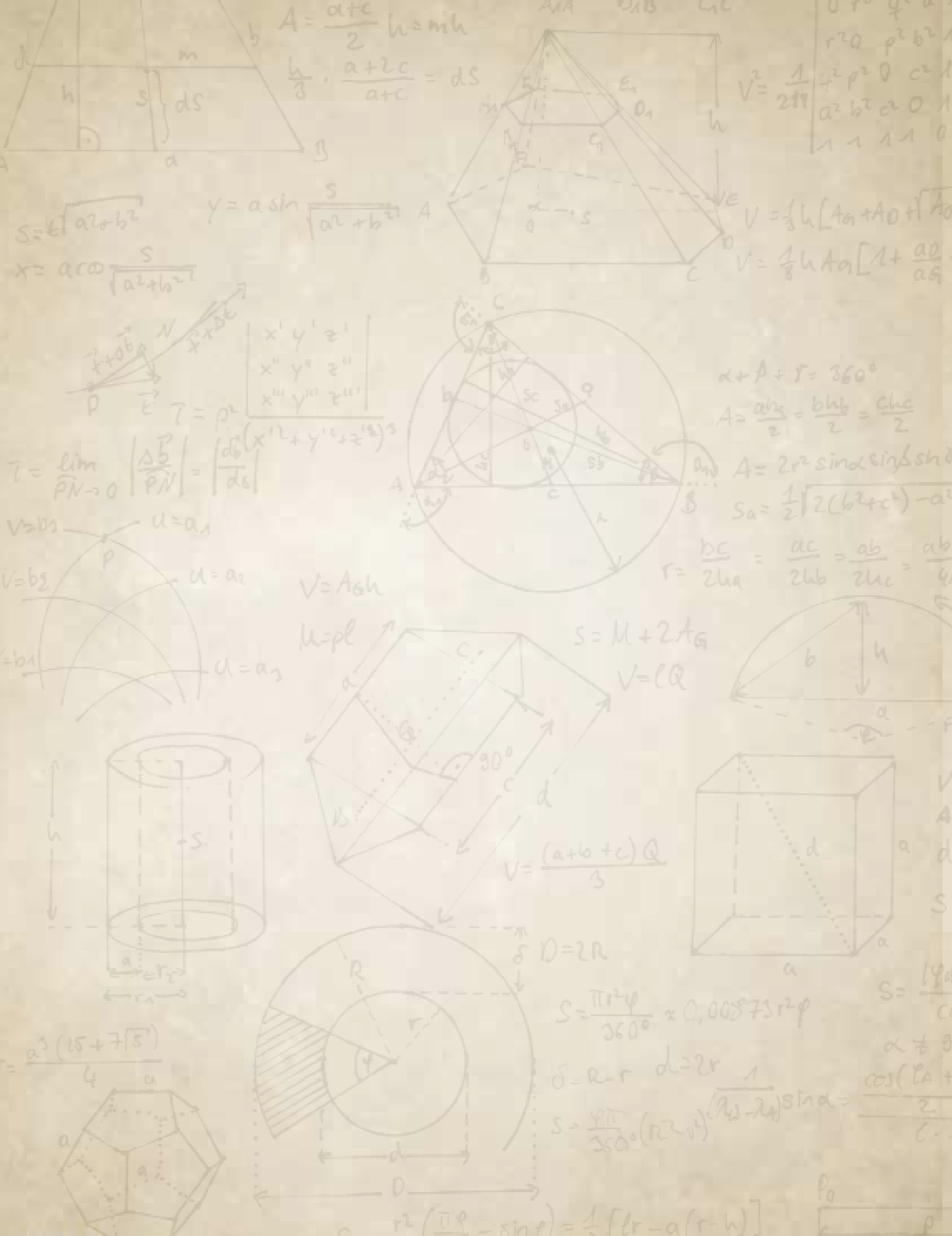
$$a \div b = \frac{a}{b}$$

Por último, supongo que sabes que el signo igual significa que el total de un miembro es exactamente el mismo que el del otro. El resto de notación la introduciremos a medida que avancemos.

Las ecuaciones funcionan como pequeñas máquinas que tuvieran partes móviles. Nuestra tarea principal es entender cuál es la función de cada parte y cómo interactúan entre ellas. A veces, esto supone invertir un tiempo desempaquetando o decodificando la notación; otras, basta con trabajar a partir de un sencillo ejemplo.

Desde un punto de vista tradicional, este libro es increíblemente desigual: en una página abordamos conceptos de álgebra propios de la escuela secundaria y, en la siguiente, nos enfrentamos a una idea que se trabaja en los últimos cursos de un grado universitario. Elegí planearlo de este modo porque los conceptos matemáticos no vienen clasificados en niveles predefinidos de dificultad. La aritmética que aprendimos de niños resulta increíblemente profunda y misteriosa; en cambio, algunos conceptos «avanzados» son fáciles de entender si obviamos la jerga matemática. La clave es dejarnos llevar: entender lo que podamos y profundizar en aquello que nos parezca más interesante. No hay manera incorrecta de abordar esta lectura.

Rich



La forma del espacio

GEOMETRÍA Y NÚMEROS

Teorema de Pitágoras

Los lados de un triángulo nos muestran cómo se organiza el espacio.

el lado más largo *los otros lados*

$$A^2 = B^2 + C^2$$

¿Qué es?

Tomemos tres ramas de una longitud cualquiera. Denominemos A, B y C a sus longitudes, y supongamos que A es la más larga. Con estas tres ramas podemos construir un triángulo si A es menor que $B + C$. Si queremos construir un triángulo con un ángulo recto –una esquina de 90°, como la de un cuadrado o un rectángulo–, las ramas deben cumplir determinadas condiciones. De hecho, dadas dos ramas B y C colocadas en ángulo recto (en forma de L), mediante el teorema de Pitágoras podemos determinar cuánto mide la rama A que completa el triángulo.

En principio, esta afirmación no parece espectacular. Además, se cumple solo para un triángulo con un ángulo recto, cosa que parece un poco limitada. ¿Cuándo fue la última vez que necesitamos calcular las longitudes de los lados de un triángulo? Pero resulta que los triángulos son figuras muy importantes. De hecho, un triángulo es la figura bidimensional más simple que puede construirse, de modo que los problemas en los que intervienen figuras bidimensionales a menudo pueden descomponerse en problemas sobre triángulos. Y sucede lo mismo con los problemas en que intervienen cuerpos geométricos. Además, los triángulos rectángulos ocupan un lugar privilegiado entre sus compañeros de tres lados [*véase* Trigonometría, página 14].

El tipo de triángulo que obtenemos depende de la longitud de sus tres lados. No todas las combinaciones de longitudes son válidas para construir un triángulo.

¿Por qué es importante?

El teorema de Pitágoras es una de las pocas ecuaciones de este libro que aplicamos, por ejemplo, cuando hacemos bricolaje en casa. Sin embargo, esto por sí solo no justifica la importancia que tiene. El teorema de Pitágoras pone de manifiesto algo esencial: habla de cómo deben combinarse las longitudes; en concreto, sobre cómo se relacionan para formar una figura determinada.

Imaginemos un extenso prado con un solitario poste de madera situado más o menos en el centro. Supongamos que en este prado hemos escondido un tesoro y que, con un mensaje tan conciso como sea posible, debemos orientar a alguien para que lo encuentre y desentierre. Si el rastreador lleva una brújula (o sabe orientarse mirando el cielo), es suficiente con darle dos números. Podemos indicarle a cuántos metros está del poste en dirección norte, y a cuántos metros en dirección este.

¿Qué pasa si el tesoro está escondido al noroeste del poste? No hay ningún problema; podemos indicar la distancia en sentido oeste con un número negativo, y el rastreador interpretará los –9 m en sentido este como 9 m en sentido oeste. De este modo, por extenso que sea el prado, podemos definir cualquier punto del mismo con solo dos números. De hecho, esta es la manera habitual de representar un itinerario en un plano bidimensional, y fue formalizada por el matemático francés René Descartes a principios del siglo XVII. En lugar de «norte» y «este», solemos usar *x* e *y*, coordenadas que recordaremos de la escuela. Los físicos también usan *i* y *j* para indicar más o menos lo mismo.

Para nuestro objetivo, ni siquiera es importante la ubicación del poste. Si cambiamos el poste de sitio, podemos ajustar los valores y corregir la posición. Así, este sistema permite trasladarnos desde cualquier punto (el poste) a cualquier otro (el tesoro). Esto es lo que dice el teorema de Pitágoras. En este caso, conocemos las distancias en dirección norte y este, que forman dos lados de un triángulo rectángulo (forman un ángulo recto). De este modo, el teorema de Pitágoras determina la distancia en línea recta entre el poste y el tesoro. Eso lo convierte en un teorema fundamental sobre distancias en el plano.

Podemos ampliar las conclusiones a tres dimensiones con solo añadir otro número que indique la distancia a la que el punto se encuentra del suelo (*véase* ilustración en la página 12). Si el número es negativo, indica cuánto debe excavarse. El teorema de Pitágoras funciona en tres dimensiones, e incluso en dimensiones superiores.

Llamamos a estos sistemas «sistemas de coordenadas rectangulares», y el teorema de Pitágoras proporciona un modo de calcular longitudes y distancias. Esta es una de las informaciones básicas que necesitamos en matemáticas, física e ingeniería, disciplinas en las que estos sistemas –y esta ecuación– se usan constantemente.

En detalle

Poco sabemos de la vida de Pitágoras. Vivió entre Grecia e Italia en el siglo V a. C. y se convirtió en el líder de un culto religioso cuyas creencias estaban impregnadas de numerología. Se cuentan extrañas historias sobre su vida y sus enseñanzas, pero si alguna vez dejó constancia de ello, sus escritos no han sobrevivido. El teorema de Pitágoras probablemente no fue descubierto o probado solo por él, pero parece que era conocido entre sus seguidores. En el libro *El ascenso del hombre*, el matemático y escritor del siglo XX Jacob Bronowski lo llamó «el teorema más importante de las matemáticas». Quizá esta afirmación sea un poco exagerada, pero es sin duda uno de los grandes logros de las matemáticas antiguas.

Observamos que el teorema de Pitágoras más parece que relacione áreas que longitudes. Después de todo, si *A* es una longitud, por ejemplo 10 cm,

Para hallar el punto *X* desde el origen *O*, recorremos cierta distancia hacia arriba y luego hacia la izquierda. En este caso, la distancia hacia la izquierda debe ser negativa.

entonces A^2 es el área de un cuadrado de 10 cm × 10 cm, es decir, de 100 cm^2 (cien centímetros cuadrados). Esta es, de hecho, la interpretación antigua del teorema, resumida en el lema que los escolares repiten década tras década: «El cuadrado del lado más largo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados». Sin embargo, esta interpretación apenas deja entrever por qué este teorema es tan importante, ya que en la vida real muy rara vez tres cuadrados se disponen de forma tan ordenada.

El poder de este teorema radica en la capacidad de resolver raíces cuadradas. La raíz cuadrada de una cantidad es el número que, al multiplicarlo por sí mismo, da como resultado la cantidad inicial. Así, la raíz cuadrada de 9 es 3, porque 3 × 3 = 9. Es decir, en una habitación cuadrada de 9 m^2 de área, cada lado debe medir 3 m. En la notación actual escribimos:

$$\sqrt{9}=3$$

símbolo que significa «raíz cuadrada».

Ahora ya podemos usar el teorema de Pitágoras para hallar la longitud de la rama que necesitamos para construir un triángulo o hallar a qué distancia del poste está el tesoro. Por ejemplo, supongamos que la rama *B* mide 3 cm de largo y la *C*, 4 cm, y forman una L. Para hallar la longitud de la rama *A* que completa el triángulo, calculamos:

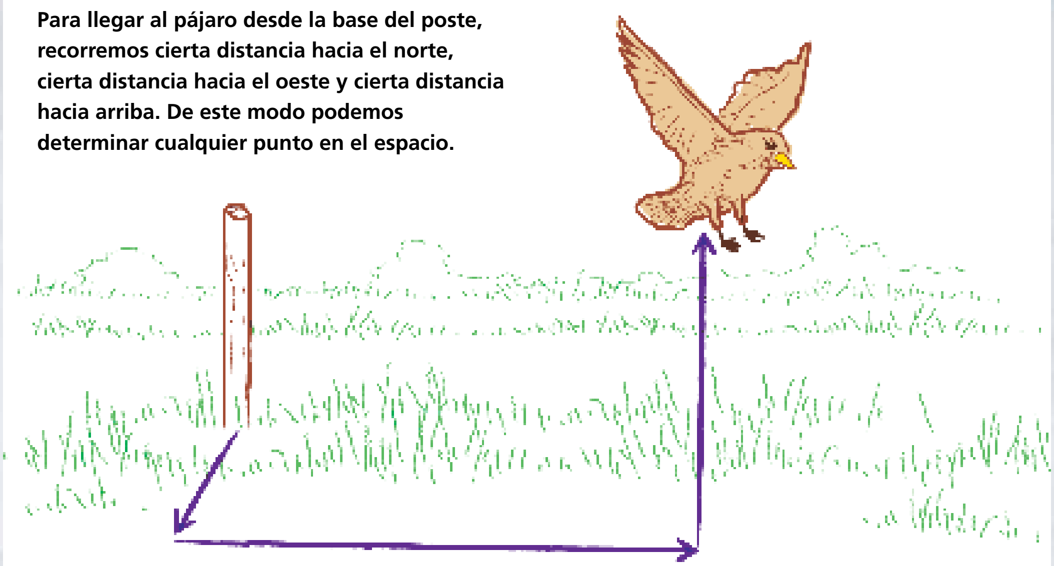
$$\begin{aligned} A^2 &= B^2+C^2 \\ &= 3^2+4^2 \\ &= 9+16 \\ &= 25\ \text{cm}^2 \end{aligned}$$

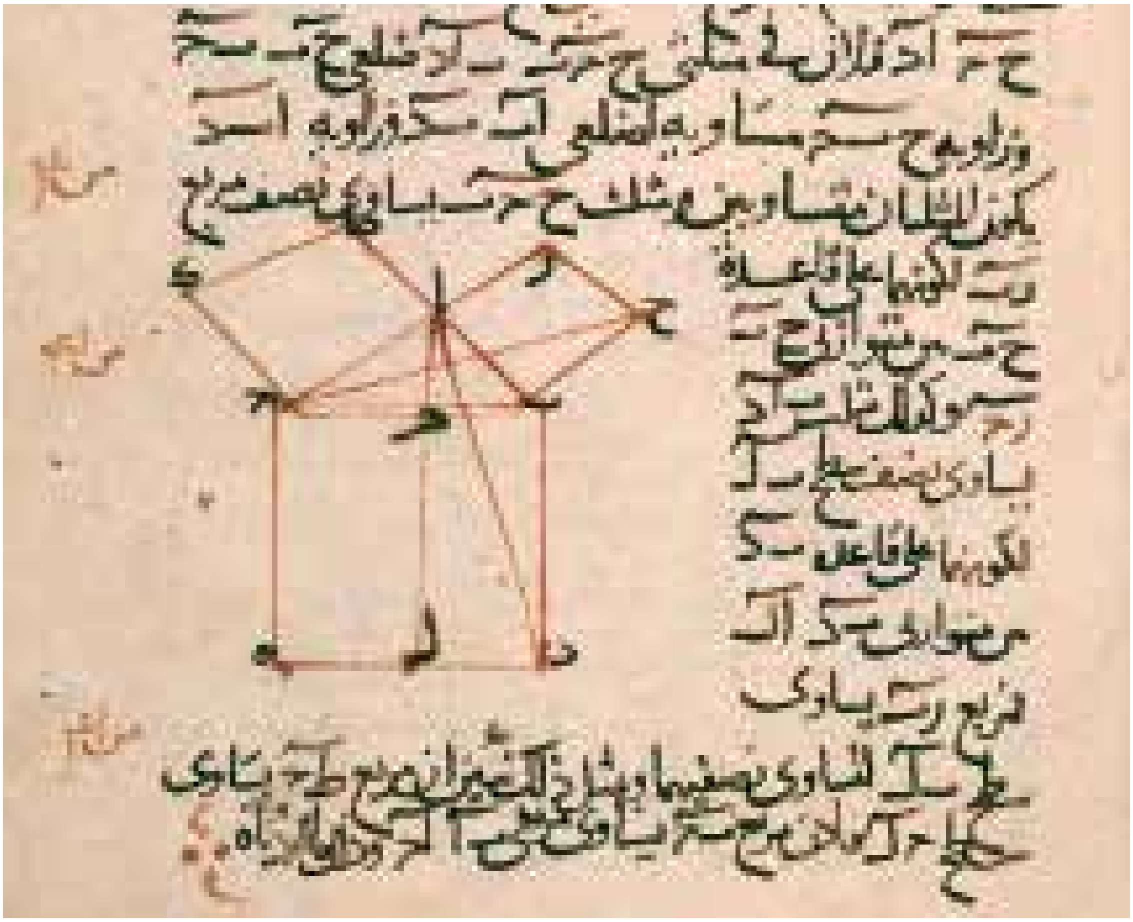
Así, conocemos el valor de A^2, pero queremos hallar *A*; es decir, conocemos el área del cuadrado pero queremos hallar la longitud de uno de sus lados, que es exactamente lo que nos da la raíz cuadrada:

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{25} \\ &= 5\ \text{cm} \end{aligned}$$

No hemos escogido los números 3, 4 y 5 por casualidad: en el teorema de Pitágoras, si *A*, *B* y *C* son tres números enteros positivos, se denominan

Para llegar al pájaro desde la base del poste, recorremos cierta distancia hacia el norte, cierta distancia hacia el oeste y cierta distancia hacia arriba. De este modo podemos determinar cualquier punto en el espacio.





«terna pitagórica». Esta terna no es fácil de hallar mediante ensayo y error, pero el geómetra griego Euclides reveló una manera inteligente de dar con ella. Elegimos dos números enteros diferentes p y q y suponemos que p es mayor que q. Entonces, si calculamos:

$$A = p^2 + q^2$$
$$B = 2pq$$
$$C = p^2 - q^2$$

El erudito persa Nasir al-Din al-Tusi, en 1258, publicó en árabe su versión de la prueba de Euclides del teorema de Pitágoras.

conseguimos una terna pitagórica. Si sabemos un poco de álgebra, podemos comprobar, siguiendo las instrucciones de Euclides, que $B^2 + C^2$ siempre será igual a A^2.

El teorema de Pitágoras parece que relaciona las áreas de tres cuadrados, pero en realidad nos dice cómo calcular la distancia que separa dos puntos en el espacio.